الفصل الأول

الفيزياء: علم الطبيعة- المتجهات

1-1 مقدمة: الكميات الفيزيائية *(Physical Quantities)*

الفيزياء علم الطبيعة الذي يهتم بكل مافيها من ظواهر ومشاهدات وحوادث، فيصف كل واحدة ويضع النظريات والقوانين التي تحاول تحديد أسبابها ونتائجها وكيف يمكن الاستفادة منها. وهوعلم قائم على التجربة والبرهان، فكل مانعرفه عن العالم من حولنا والقواعد والنظم التي تتحكم به ليس إلا محصلة ملاحظات وتجارب البشر للظواهر الطبيعية ومحاولة تفسيرها مع مرور الزمن. وبالتالي فإن كل نظرية توضع لوصف أو تعليل أي ظاهرة لابد وأن تخضع للتجربة والاختبار للتأكد من صحتها أو بطلانها. وعند قيامنا بإجراء تجربة ما فإننا نقوم بقياس كميات محددة، كالمسافة التي يسيرها الصوت في زمن معين، أو مقدار تغير درجة حرارة معدن عند وضعه في فرن حار. ثم نستعمل هذه الكميات **المقاسة** *(measured quantities)* للحصول على كميات أخرى **محسوبة** *(calculated quantities)* كسرعة انتشار الصوت، أو الحرارة النوعية لمعدن، وهكذا.

ويطلق على كل عدد يعبر عن قيمة فيزيائية اسم **كمية فيزيائية** *(physical quantity)*. فعندما نقول إن طول غرفة هو أربعة أمتار فإننا نعبر عن كمية فيزيائية هي الطول، ولذلك فإن العدد 4 هو كمية فيزيائية، بينما لو كتبنا طاقة حركة جسم بالشكل $\frac{1}{2}mv^2$ فإن العدد ½ لايعتبر كمية فيزيائية وليس له أبعاد.

ولتعريف أي كمية فيزيائية يجب أن يكون بالإمكان وصف طريقة لقياسها أو تحديد العمليات الرياضية اللازمة لحسابها. فنعرف الزخم الخطي لجسم بحاصل ضرب كتلته بسرعته، بينما نعرف سرعة الجسم بحاصل قسمة المسافة المقطوعة على الزمن اللازم لذلك. إلا أنه لاتوجد كميات فيزيائية أبسط من الكتلة والزمن والمسافة حتى نعرفها بها. ولذلك تسمى هذه المقادير **كميات أساس** *(basic quantities)* وتكتب أي كمية فيزيائية أخرى في الميكانيك، مثل الطاقة والقوة والعزم وغيرها، بدلالتها. ويطلق على هذه الأخيرة عندئذ اسم **كميات مشتقة** *(derived quantities)*. وتكون وحدات هذ الكميات ناتجة عن حاصل ضرب و/أو قسمة وحدات الكميات الأساس فقط. فمثلا وحدة القوة في النظام الدولي هي النيوتن الذي يساوي كيلوغرام مضروبا بالمتر ومقسوما على مربع الثانية ($1\ N=1\ kg.m/s^2$).

ونستفيد مما تقدم للتأكد من صحة المقادير التي نستخدمها في الفيزياء إذ لايجوز أن تحوي وحدة القوة مثلا وحدة الكتلة مربعة أو وحدة المسافة مكعبة، وهكذا.

2-1 نظام الوحدات الدولي *(SI units)*

عندما نقيس كمية فيزيائية، كالمسافة أو الزمن أو الكتلة، فإننا نقارنها بكمية ثابتة نسميها **وحدة عيارية** *(standard unit)*، كالمتر أو الثانية أو الكيلوجرام. فعندما نقول مثلا إن طول حبل ثلاثون مترا، أي أن طول هذا الحبل يعادل ثلاثين ضعفا من طول وحدة عيارية ثابتة تساوي بالتعريف مترا واحدا. وقد تقرر في نظام الوحدات الدولي التي يرمز لها بـ *SI (Systeme International)* أن يكون **المتر** (m) الوحدة الأساسية للطول، **والثانية** (s) الوحدة الأساسية للزمن، **والكيلوجرام** (kg) الوحدة الأساسية للكتلة.

وهناك أنظمة أخرى للوحدات، كالنظام الانجليزي حيث يستخدم القدم والباوند كوحدات أساس للطول والثقل، إلا أنها في طريقها للزوال نتيجة اتفاق دولي لاستخدام الوحدات الدولية.

ويعتمد تحديد وحدة عيارية ما للطول والكتلة والزمن، وأي كمية أخرى، على ثبوت هذه الكمية العيارية مع مرور الوقت وإمكانية نسخها بسهولة لتوفيرها للمختبرات والمؤسسات المختلفة التي

تحتاج إليها. ونتطرق فيما يلي لتعريف الوحدات الأساس للطول والكتلة والزمن في النظام الدولي.

1- وحدة الطول *(length)*

المتر العياري التقليدي

اعتمد المتر كوحدة أساسية للطول وعرف تاريخيا بواحد من المليون من المسافة الفاصلة بين القطب الشمالي وخط الاستواء مرورا بمدينة باريس. وقد تم تحديد هذه المسافة بدقة بين نقطتين على طرفي قضيب معدني مصنوع من خليط من البلاتين والإريديوم عند درجة حرارة 0 °C، ويحتفظ به في متحف في باريس. وعلى الرغم من الدقة الفائقة التي تم بها تحديد هذا المتر العياري إلا أنه تبين أنه يختلف بحدود 0.023% عما كان مقصود به، مع صعوبة الحصول على نسخ منه، ناهيك عن التغير الطفيف في طوله مع درجة الحرارة وغير ذلك من العوامل. لذلك بحث اختصاصيو المواصفات والمقاييس عن ظواهر طبيعية ثابتة ليس للإنسان أي علاقة بها ولايمكنه التدخل بخواصها التي قدرها الخالق العظيم. فتقرر في المؤتمر الدولي للمواصفات والمقاييس عام 1960 اعتماد "وصفة" جديدة للمتر ليكون مساويا لـ 1,650,763.73 ضعفا من طول موجة اللون الأحمر-البرتقالي الصادر عن عنصر الكريبتون (^{86}Kr) في الفراغ. وقد اختير هذا الرقم الغريب ليبقى المتر مساويا للطول الأصلي الذي اعتمد سابقا. ويبدو جليا أن المتر المعرف بهذه الطريقة مستقل تماما عن أي آلة أو تدخل بشري، وعلى الرغم من ذلك فإن حاجة المؤسسات البحثية والمختبرات العلمية للدقة والتقانة الأعظم تطلبت تعريفا أدق للمتر. لذا تقرر عام 1983، خلال المؤتمر السادس عشر للمواصفات والمقاييس، اعتماد سرعة الضوء، التي تعتبر أكثر الكميات الفيزيائية ثبوتا، أن يكون المتر مساويا إلى المسافة التي يقطعها الضوء في الفراغ خلال 1/299,792,458 من الثانية، أي أن سرعة الضوء قد تحددت بالقيمة 299,792,458 متر لكل ثانية. ونعطي في الجدول1-1 بعض المسافات في الطبيعة.

2- وحدة الكتلة *(mass)*

لعل تحديد وحدة عيارية للكتلة هو من أصعب المواضيع التي واجهها اختصاصيوا القياس والمواصفات. ففي البدء تقرر اعتبار الكيلوجرام مساويا لقطعة معينة من خليط البلاتين والإريديوم، واحتفظ بهذه القطعة في باريس. إلا أن هذا لم يكن دقيقا تماما فاستخدمت ذرة الكربون ^{12}C وقورنت بقية العناصر بها للحصول على كتلها بالنسبة لها (الكتل النسبية). ولكن

الكيلوجرام العياري

مقارنة هذه الكمية العيارية بكتل منظورة ومحسوسة بدقة عالية لم يكن ممكنا. وبخلاف أختيها الزمن والطول بقيت وحدة الكتلة بدون تعريف دقيق بشكل كاف. ولذلك قام مكتب المواصفات والقياس في الولايات المتحدة الأمريكية ومعهد القياس التقني في ألمانيا بابتكار طريقة جديدة لتحديد الكتلة عن طريق حساب عدد الذرات في قطعة من السيليكون بدقة عالية. فأمكن إعادة تعريف الكيلوجرام ليكون مساويا لعدد معين من ذرات عنصر السيليكون بحيث يمكن الحصول على نسخ منه في أي مكان في العالم بتحضير عينة تحوي ذلك العدد تماما. ونعطي في الجدول1-1 بعض الكتل في الطبيعة.

3- وحدة الزمن *(Time)*

تعتمد وحدة الزمن على ظاهرة تتكرر دائما بنفس الشكل وخلال نفس الزمن، كاهتزازات بندول بسيط أو دوران الأرض حول الشمس وغيرها. وقد كان شائعا استخدام متوسط طول اليوم الشمسي (الزمن الفاصل بين ظهورين متتاليين للشمس في كبد السماء) ليكون مساويا إلى 86,400 ثانية أي 24 ساعة. لكن تغير طول اليوم خلال السنة جعل هذا التعريف غير دقيق تماما. ولذلك اعتمد على تردد اهتزازات ذرات بلورات الكوارتز كوحدة عيارية للزمن لفترة قريبة جدا. إلا أن دقة هذه الطريقة ترتبط بطاقة هذه الذرات التي لاتبقى ثابتة تماما نتيجة الاحتكاك وغير ذلك من المؤثرات الخارجية. فاستخدمت اهتزازات عنصر السيزيوم (^{133}CS) بدلا منها وحددت الثانية لتكون مساوية إلى الزمن اللازم لـ 9,192,631,1770 اهتزازة من ذرات هذا العنصر. ونعطي في الجدول1-1 بعض القيم لفترات زمنية معينة.

ساعة سيزيوم

وكثيرا مانستعمل أضعافا أو أجزاءا من وحدة عيارية ما. ففي نظام الوحدات الدولي نستعمل الوحدات العيارية مضروبة بالعدد عشرة مرفوعة لقوة ما، ويطلق عليها عندئذ اسم خاص بها. ونعطي في الجدول 1-2 اسم الوحدة الأساس ومضاعفاتها للطول والزمن والكتلة في هذا النظام. وفي الجدول1-3 الأسم الذي يطلق على العدد عشرة مرفوعا إلى إحدى القوى.

الجدول 1-1

بعض الأطوال في الطبيعة (m)		بعض الكتل في الطبيعة (kg)		بعض الفترات الزمنية (s)	
بعد الأرض عن الشمس	2×10^{16}	الكون	10^{52}	عمر الكون	5×10^{17}
بعد القمر عن الأرض	4×10^{9}	مجرة درب التبانة	7×10^{41}	عمر الشمس	1.4×10^{17}
نصف قطر الشمس	7×10^{8}	الشمس	9×0^{30}	عمر الأرض	1×10^{17}
نصف قطر الأرض	6.4×10^{6}	الأرض	6×10^{24}	عمر الإنسان	6×10^{8}
نصف قطر القمر	1.7×10^{6}	القمر	7×10^{22}	سنة ارضية	3×10^{7}
أعلى جبل في العالم	9×10^{3}	الإنسان الرشيق	7×10^{1}	يوم واحد	9×10^{4}
متوسط طول الإنسان	1.7×10^{0}	حشرة	1×10^{-5}	محاضرة مملة	3×10^{3}
قطر ذرة الهيدروجين	1×10^{-10}	جرثوم	1×10^{-55}	نبضة قلب	8×10^{-1}
قطر النواة	1×10^{-14}	ذرة الهيدروجين	2×10^{-27}	موجة صوتية	1×10^{-3}
قطر البروتون	1×10^{-15}	الإلكترون	9×10^{-31}	موجة ضوئية	2×10^{-15}

وقد يكون من الضروري في بعض الأحيان تحويل وحدات كميات فيزيائية من نظام لآخر أو من شكل لآخر. فإذا أعطيت سرعة جسم بالكيلومتر بالساعة بينما المطلوب تقديرها بالمتر لكل ثانية عندئذ نستخدم الجدولين 1-2 و1-3 لتحويل السرعة من شكل لآخر، كما يلي:

$$1\,\text{km/h}=(1\,\text{km}\times1000\,\frac{\text{m}}{\text{km}})/(1\text{h}\times3600\,\frac{\text{s}}{\text{h}})=0.278\,\text{m/s}$$

وبنفس الطريقة نحول وحدات أي كمية من نظام لآخر.

3-1 أبعاد الكميات الفيزيائية ومعادلة الأبعاد *(Dimensions)*

إن مهمة الدارس للعلوم الطبيعية، كالفيزياء، أن يربط بين الكميات الفيزيائية بوساطة معادلات وقوانين مختلفة واستنتاج مايمكن استنتاجه منها. ويجب أن تتوافق أبعاد الكميات المستعملة في علاقة ما مع بعضها. فلا يجوز مثلا أن نساوي بين كيلومترات وساعات، أو بين جول ووات. كما لايمكن أن نجمع ساعات مع أمتار، أو كيلوجرامات مع جول. ولهذا نستعمل أبعاد الكميات الفيزيائية للتأكد من صحة القوانين والمعادلات التي نستخدمها في التجارب والتطبيقات. وتعني كلمة بعد *(dimension)* ماهية الكمية الفيزيائية. فسواء قدرنا المسافة بين نقطتين بالمتر أو بالقدم أو بالقصبة فإننا في كل الأحوال نتكلم عن مسافة ونقول إن بعد المسافة هو **طول** *(length)*

ونرمز له [L]. وبنفس الشكل نرمز لبعد الزمن *(time)* [T] ولبعد الكتلة *(mass)* [M]، حيث نستخدم الأقواس المربعة [ ] للدلالة على بعد الكمية فقط وليس على وحدتها أو قيمتها.

فإذا أعطينا حجم اسطوانة بدلالة نصف قطرها وارتفاعها على النحو $V = \pi r^2 h$ عندئذ يمكن التحقق من صحتها بكتابة معادلة الأبعاد [V]=[L]²[L] حيث [L]² بعد مربع نصف القطر و [L] بعد الارتفاع، أما π فهو رقم لايمثل كمية فيزيائية وليس له أبعاد. ومن ثم نجد أن بعد الحجم هو [V]=[L]³ أي مكعب المسافة. فالعلاقة المذكورة أعلاه صحيحة من ناحية الأبعاد على الأقل.

مثل 1-1

تعطى الطاقة الميكانيكية لجسم بالعلاقة $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ حيث m كتلته وv سرعته وg تسارع الجاذبية الأرضية قرب سطح الأرض وh ارتفاع الجسم عن سطح الأرض. تأكد من توافق الأبعاد في هذه العلاقة.

الحل: نكتب معادلة الأبعاد من العلاقة السابقة ملاحظين أن أبعاد الكتلة هي [M]، وأبعاد السرعة هي مسافة مقسومة على زمن، أي [T]/[L]، وأبعاد تسارع الجاذبية هي مسافة مقسومة على مربع الزمن، أي [T]²/[L]. ومن ثم نكتب معادلة الأبعاد للعلاقة المعطاة بالشكل:

$$[E]=[M]\frac{[L]^2}{[T]^2}+[M]\frac{[L]}{[T]^2}[L]=[M]\frac{[L]^2}{[T]^2}+[M]\frac{[L]^2}{[T]^2}$$

ونلاحظ أن للحدين الأخيرين من الطرف الأيمن نفس الأبعاد وهي كتلة مضروبة بمربع مسافة مقسومة على مربع زمن وهذه أبعاد طاقة، كما سنجد في الفصول اللاحقة. كما نلاحظ أننا لم نذكر العدد ½ لأنه رقم ولايمثل كمية فيزيائية.

مثل 1-2

يستخدم طالب العلاقة التالية لتحديد بعد سيارة عنه بدلالة الزمن:

$$s = \frac{1}{2}v_0 t^2 + vt$$

حيث s وv بعد السيارة وسرعتها في اللحظة t بينما v_0 سرعتها لحظة بداية مراقبتها (السرعة الابتدائية) والعدد ½ ثابت ليس له أبعاد. تأكد من صحة هذه العلاقة.

الحل: لنكتب معادلة الأبعاد للعلاقة السابقة، مهملين العدد ½ لعدم وجود أبعاد له، فنجد:

$$[L]\overset{?}{=}\frac{[L]}{[T]}[T]^2+\frac{[L]}{[T]}[T]$$

حيث [T]/[L] بعد السرعة المساوي لمسافة مقسومة على زمن، ومن ثم يكون:

$$[L] \stackrel{?}{=} [L][T] + [L]$$

ونلاحظ أن أبعاد الطرف الأيمن تختلف عن أبعاد الطرف الأيسر، أي أن المعادلة غير صحيحة.

4-1 الأرقام المعنوية *(Significant figures)*

عند قياس كمية فيزيائية بطريقة ما فإن دقة النتيجة التي نتوصل إليها تكون محدودة ضمن إمكانيات الأجهزة التي نستخدمها، وخبرة الشخص الذي يقوم بالقياس، وعدد المرات التي تقاس بها الكمية المعنية، وغير ذلك. فمثلا إذا قسنا طول وعرض قطعة مستطيلة باستخدام مسطرة مترية دقتها $\pm$ 0.1 cm ووجدنا أن طول القطعة 16.3 cm فذلك يعني أن طولها محصور بين 16.2 cm و16.4 cm، ونقول إن القيمة المقاسة تحوي ثلاثة أرقام معنوية. وبنفس الشكل، إذا قسنا عرض القطعة 4.5 cm فإن القيمة الحقيقية تقع بين 4.4 cm و 4.6 cm، وتحوي هذه القيمة رقمين معنويين فقط. ونلاحظ أن الأرقام المعنوية تشمل أول رقم تقريبي في المقدار المقاس، أي الرقم 3 في الطول والرقم 5 في العرض. ونكتب نتيجة قياس الطول والعرض بالشكل 16.3±0.1 cm و4.5±0.1 cm، على الترتيب. لنحسب الآن مساحة القطعة بضرب طولها بعرضها فنجد $73.35\ cm^2$=(4.5 cm)(16.3 cm). إلا أنه لايصح كتابة النتيجة بهذا الشكل لأنها تحوي أربعة أرقام معنوية، أي أكثر من القيمتين المقاستين. ولمعرفة العدد الصحيح للأرقام المعنوية اللازم الاحتفاظ بها نستخدم القاعدة التالية: عند إجراء عملية حسابية على أرقام مختلفة فإن عدد الأرقام المعنوية في الجواب النهائي يجب أن لايزيد عن عدد الأرقام المعنوية في الكمية الأقل دقة، أي التي تحوي أقل عدد من الأرقام المعنوية. وبتطبيق ماتقدم على مساحة القطعة المذكورة أعلاه نلاحظ أن الجواب لايجب أن يشمل أكثر من رقمين معنويين لأن العرض يحوي رقمين فقط ولذا نكتب مساحة القطعة بالشكل: $7.3\times10^1\ cm^2$.

من جهة أخرى، فإن العدد صفر في رقم ما قد يشكل معضلة إن لم يتم التعامل معه بشكل صحيح. فلو كتبنا كتلة جسم 1500 g أو 1.5 kg فإن كلا الرقمين صحيح، إلا أننا نكتب الإجابة دائما على شكل عدد مضروب بعشرة مرفوعة إلى قوة ما. فإن كان العدد يحوي رقمين معنويين نكتب 1.5×10^0 kg، وإن حوى ثلاثة أرقام معنوية فنكتب 1.50×10^0 kg، وهكذا. وبنفس الشكل نكتب رقما مثل 0.0015 بالرموز العلمية 1.5×10^{-3} إذا حوى رقمين معنويين فقط أوعلى النحو 1.50×10^{-3} إن حوى ثلاثة أرقام معنوية.

ونستنتج مما تقدم أن وجود أصفار إلى يمين أو يسار الرقم لايعني كونها معنوية بالضرورة، أما وجودها في منتصفه، مثل 105، فإنها تحسب ضمن الأرقام المعنوية طبعا.

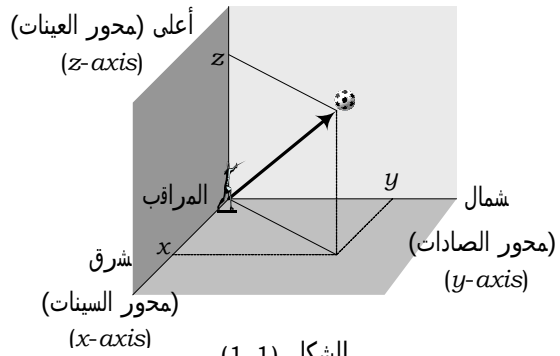
ويمكن تحديد مكان الفاصلة العشرية في أي نتيجة حسابية باستخدام القاعدة التالية: عند إجراء عملية حسابية على أرقام مختلفة فإن عدد الأرقام إلى يمين الفاصلة يجب أن يكون مساويا لأقل عدد من الأرقام على يمينها في أي عدد مستعمل في العملية. فعلى سبيل المثال إذا جمعنا 23.1+5.32 فيجب كتابة النتيجة 28.4 فقط وليس 28.42.

ونعيد التذكير بأن عدد الأرقام المعنوية التي يمكن الاحتفاظ بها في أي عدد يعتمد على الطريقة التي حصلنا عليه. فإن كان نتيجة قياس مباشر فيعتمد على أجهزة وطريقة القياس، وإن كان نتيجة حساب من أعداد أخرى فيعتمد على هذه الأعداد وكم فيها من أرقام معنوية.

5-1 المحاور الإحداثية *(Coordinate Systems)*

عندما ندرس حركة ما، كالنجوم في السماء أو الإلكترونات في الذرة أو سيارة في الشارع، فإننا نكون معنيين بتحديد موضع وسرعة وتسارع الجسم المدروس والقوى المؤثرة عليه في كل لحظة من الزمن. فإذا قام مراقب بمتابعة جسم ما (نجم أو سيارة أو كرة قدم، الخ) فإنه يحدد موضعه بالنسبة له فيقول إن الجسم يبعد عنه مسافة ما وباتجاه معين. وإذا انتقل الجسم من مكانه فإنه يحدد بعده واتجاهه الجديدين في كل لحظة. ومما لاشك فيه أنه إذا كانت حركة الجسم في الفضاء عشوائية فإن تحديد المكان أو الموضع يصير موضوعا معقدا فعلا. لذا يمكن للمراقب اعتماد اتجاهات ثابتة بالنسبة له ويحدد مواضع الأجسام التي يدرسها بالنسبة لهذه الاتجاهات. فإذا اعتمد الاتجاهات التالية: شرق-غرب وشمال-جنوب وأعلى-أسفل، يقول إن الجسم يبعد عنه 3 m شرقا و 7 m جنوبا و4 m للأعلى. وإذا تحرك الجسم من مكانه فإن أبعاده الثلاثة تتغير مع الزمن وفق علاقات معينة تحددها القوى المؤثرة عليه، كما سنرى لاحقا. ولكن تحديد الاتجاهات بكلمات شرق أو غرب أو شمال أو جنوب، الخ، ليس عمليا تماما، كما يحتمل أن يكون هناك اتجاهات أفضل للاستعمال عند دراسة حركة أجسام معينة. لذا نعتمد اصطلاحا شبكة من ثلاثة محاور متعامدة يطلق عليها اسم **منظومة محاور إحداثية** *(coordinate system)* ينطبق فيها محور السينات *(x-axis)* على اتجاه شرق-غرب مثلا، ومحور الصادات *(y-axis)* على اتجاه شمال-جنوب، ومحور العينات *(z-axis)* على اتجاه أعلى-أسفل. عندئذ نقول إن موضع الجسم المذكور آنفا يعطى بالإحداثيات x=+3 m وy=–7 m و z=+4 m، حيث نتفق أن الإشارة الموجبة تعني نحو الشرق أو الشمال أو الأعلى، على الترتيب، بينما تعني الإشارة السالبة نحو

الغرب أو الجنوب أو الأسفل، على الترتيب أيضا. وتسمى x وy وz **إحداثيات ديكارتية** *(Cartesian coordinates)*، كما هو موضح بالشكل (1-1). وهناك طرق أخرى لتحديد موضع جسم في الفضاء، إلا أننا سنكتفي باستخدام الإحداثيات الديكارتية فقط في هذا الكتاب.



الشكل (1-1)

6-1 المتجهات والأعداد *(Vectors & Scalars)*

تتميز بعض الكميات الفيزيائية، مثل الزمن أوالكتلة وغيرها، أنها تتعين كليا بعدد واحد فقط، مع إشارة موجبة أو سالبة أحيانا. فعندما نقول إن كتلة جسم تساوي 75 kg، أو أن درجة الحرارة 5 °C–، فإن هذا العدد وحده كاف لتعريف الكمية المذكورة. ولذا نطلق على هذا النوع من الكميات اسم **كميات عددية** *(scalars)*. من ناحية أخرى، فإن هناك كميات فيزيائية لايمكن تحديدها بشكل كامل بعدد واحد فقط. فعندما يسير متحرك من موضع ما A مسافة ما d فإن معرفة مقدار المسافة المقطوعة وحده غير كاف لمعرفة المكان الذي وصل إليه بل لابد من معرفة اتجاه الحركة شرقا كان أم غربا، شمالا أم جنوبا، وهكذا. وبالتالي فإن الإزاحة، وهي كمية فيزيائية، تتحدد بمعرفة قيمتها واتجاهها معا. ويطلق على هذا النوع من الكميات اسم **كميات متجهة** أو **متجهات** *(vectors)*.

ويرمز عادة للمتجه بحرف غامق **A** أو حرف عادي وفوقه سهم صغير $\vec{A}$ ، ويمثل بيانيا بقطعة مستقيمة $\overline{PQ}$ يتناسب طولها مع قيمة المتجه بينما يدل منحاها على اتجاهه، كما في الشكل(1-2أ). وتسمى النقطة P نقطة بداية المتجه وQ نهايته. ونعبر عن طول **A** أو مقداره بالشكل:

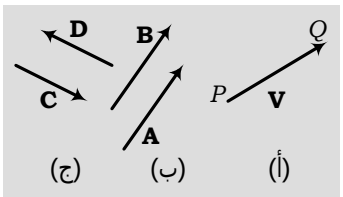
$$\text{طول } \mathbf{A} = A = |PQ| = \overline{PQ} \qquad (1\text{-}1)$$

7-1 جبر المتجهات *(Vectors Algebra)*

1- تساوي المتجهات:

نقول إن المتجهين **A** و**B** متساويان إذا كان لهما نفس الطول والاتجاه ونكتب:

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}$$



الشكل (1-2)

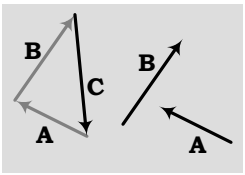
ويمثل الشكل (1-2ب) المتجهين المتساويين **A** و**B**. أما إذا كان للمتجهين **C** و**D** نفس الطول ولكن اتجاهين متعاكسين، كما في الشكل (1-2ج)، عندئذ يكون:

$$\mathbf{C}=-\mathbf{D}$$

2- جمع المتجهات:

أ- **جمع المتجهات بالرسم** (بيانيا):

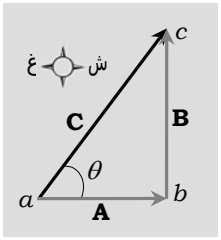
لجمع **A** و**B** بيانيا نرسم متجها يتناسب طوله مع **A** وبنفس الاتجاه ثم نرسم متجها آخر تقع بدايته عند نهاية الأول ويتناسب طوله مع **B**، فيكون المتجه الواصل من بداية **A** إلى نهاية **B** مساويا لمحصلتهما، كما في الشكل (1-3). ونلاحظ أن المتجه لايتغير إذا نقلناه من مكانه شريطة المحافظة على طوله واتجاهه.



الشكل (1-3)

مثل 1-3

يتحرك جسم مسافة 30 km شرقا ثم 40 km شمالا. ما الإزاحة الكلية لهذا الجسم قيمة واتجاها؟



الشكل (1-4)

الحل: نوضح حركة الجسم بيانيا في الشكل(1-4)، فنمثل الإزاحة الأولى بمتجه **A** نحو الشرق يتناسب طوله مع 30km معتبرين كل 1 cm تكافئ 10 km مثلا، فيكون طول **A** 3 cm، بينما نمثل الإزاحة الثانية بمتجه **B** نحو الشمال ويتناسب طوله مع 40 km، أي 4 cm. ثم نضع بداية **B** عند نهاية **A** ونصل بين بداية **A** ونهاية **B** فنحصل على المتجه **C** المساوي لحاصل جمع **A**+**B**. ونلاحظ من الشكل (1-4) أن طول الوتر ac في المثلث القائم abc يساوي:

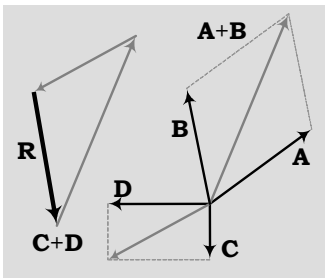
$$\overline{ac} = \sqrt{\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2} = 5 \text{ cm}$$

فطول c يساوي 5 cm وهذا يعادل مسافة 50 km. وأما اتجاهه فنحدده بالزاوية بينه وبين **A** مثلا فنجد من المثلث abc أن:

$$\tan\theta = \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}} = 1.33 \;\Rightarrow\; \theta = 53°$$

وعملية جمع المتجهات **تبديلية**، أي أن:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad (2\text{-}1)$$



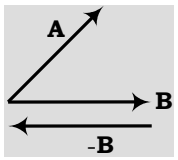
الشكل (1-5)

فيمكن للجسم المذكور في المثل السابق أن يتحرك نحو الشمال أولا مسافة 40 km ثم 30 km شرقا وسيصل إلى نفس الموضع الذي وجدناه تماما. ويسمى مجموع متجهين أو أكثر **المحصلة** *(resultant)*، ويوضح الشكل (1-5) عملية جمع أربعة متجهات بيانيا.

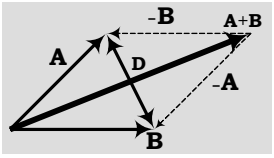
ويعتبر طرح المتجهات حالة خاصة من عملية الجمع لأنه يمكن كتابة

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \qquad (3\text{-}1)$$

حيث **B**– متجه مساو لـ **B** بالقيمة ومعاكس له بالاتجاه، لذا نرسم **B**– أولا ونجمعه مع **A**، كما في الشكل (1-6). ونستنتج من الشكل (1-7) أنه إذا رسمنا متوازي الأضلاع المؤلف من **A** و**B** كضلعين متجاورين فيه، فإن القطر الواصل بين بداية **A** ونهاية **B** يمثل المجموع $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$، بينما يمثل القطر الآخر الطرح $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ أو $-\mathbf{D} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$، بحسب الاتجاه الذي نختاره.



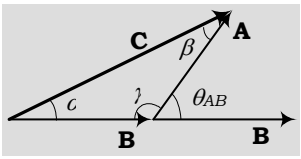
الشكل(1-6)



الشكل(1-7)

ويمكن الحصول على طول المحصلة لأي متجهين **A** و**B** من **علاقة جيب التمام** *(cosine law)* التي سنبرهن صحتها في الفقرة القادمة، فنكتب:

$$c = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta_{AB}} \qquad (4\text{-}1)$$



الشكل (1-8)

حيث θ_{AB} الزاوية بين **A** و**B**.

كما نحصل على اتجاه **C** بحساب الزاوية بينه وبين **A** أو**B** من

علاقة الجيب *(sine law)* ونكتب:

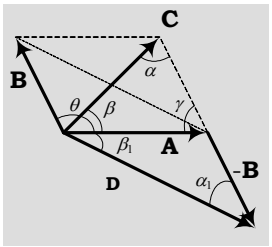
$$\frac{A}{\sin\alpha}=\frac{B}{\sin\beta}=\frac{C}{\sin\gamma} \qquad (5\text{-}1)$$

حيث تعرف الزوايا α و β و γ كما هو موضح بالشكل (1-8).

مثل 1-4

ماقيمة واتجاه كل من **C**=**A**+**B** و**D**=**A**–**B** في الشكل (1-9) إذا كان A=7 و B=6 و θ=120°؟

الحل: لإيجاد المحصلة **C**=**A**+**B** نكمل بالرسم متوازي الأضلاع فنحصل على المتجه **C** الممثل لها. ولحساب طوله نستخدم العلاقة (1-4) ونكتب:



الشكل (1-9)

$$c=\sqrt{(7)^2+(6)^2+2(7)(6)\cos 120^\circ}=6.6$$

ونجد اتجاهه من العلاقة (1-5):

$$\frac{7}{\sin\alpha}=\frac{6}{\sin\beta}=\frac{6.6}{\sin 60^\circ}$$

ومنه:

$$\sin\beta=0.79 \quad\Rightarrow\quad \beta=52^\circ$$

الآن: لإيجاد حاصل الطرح **D**=**A**–**B** نلاحظ من الشكل (1-9) أن:

$$D=\sqrt{(7)^2+(6)^2+2(7)(6)\cos 60^\circ}=11.3$$

كما نجد اتجاه **D** من علاقة الجيب:

$$\frac{7}{\sin\alpha_1}=\frac{6}{\sin\beta_1}=\frac{11.3}{\sin 60^\circ}$$

أي أن:

$$\sin\alpha_1=0.54 \quad\Rightarrow\quad \alpha_1=32^\circ$$

ب- **جمع المتجهات تحليليا** (المركبات):

بما أن مجموع متجهين هو متجه ثالث، لذلك يمكن تحليل أي متجه **C** لمتجهين $\mathbf{C}_x$ و$\mathbf{C}_y$ ونكتب:

$$\mathbf{C}=\mathbf{C}_x+\mathbf{C}_y \qquad (6\text{-}1)$$

وإذا اخترنا اتجاهي c_x وc_y ليكونا متعامدين، كما في الشكل(1-10)، عندئذ نكتب:

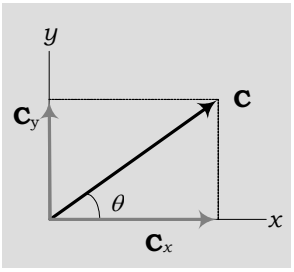
$$C_x = C\cos\theta \quad \Leftarrow \quad \cos\theta = \frac{C_x}{C}$$
$$C_y = C\sin\theta \quad \Leftarrow \quad \sin\theta = \frac{C_y}{C} \qquad (7\text{-}1)$$

ويطلق على c_x اسم **المركبة السينية** *(x-component)* وc_y **المركبة الصادية** *(y-component)*.
ويمكن الحصول على طول **C** واتجاهه من مركبتيه من الشكل (1-10) فنكتب:

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \qquad (8\text{-}1)$$

و

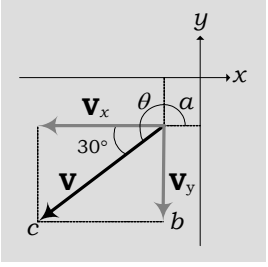
$$\tan\theta = \frac{C_y}{C_x} \qquad (9\text{-}1)$$



الشكل (1-10)

ولابأس من التنويه إلى أنه كان بالإمكان اختيار الزاوية بين محور السينات *ox* ومحور الصادات *oy* في الشكل (1-8) كيفما نشاء إلا أن اختيارها قائمة أدى للحصول على العلاقات (1-7) و(1-8) و(1-9) ولذا تسمى هذه المحاور **منظومة محاور متعامدة** *(orthogonal coordinate system)*.

مثل 1-5



الشكل (1-11)

مامركبتي المتجه**V** الموضح في الشكل (1-11) على المحورين *ox* و*oy* إذا كان طوله 7 وحدات وθ=30°؟

الحل: **الطريقة الأولى** (بالحساب): لنحدد الزاوية التي يصنعها **V** مع محور السينات الموجب فنجد:

$$\theta = 180° + 30° = 210°$$

ولذلك نكتب من (1-7):

$$V_x = V\cos\theta = 7\cos 210° = -6.1$$

و

$$V_y = V\sin\theta = 7\sin 210° = -3.5$$

ونلاحظ أن العلاقات (7-1) تعطينا قيمة واتجاه كل مركبة شرط أن نستعمل الزاوية التي يصنعها المتجه مع محور السينات **بدءا من محور السينات الموجب إلى المتجه بعكس عقارب الساعة**.

الطريقة الثانية(بالرسم): بإمكاننا إيجاد مركبة **V** على محور السينات من الرسم بإسقاط عمود من بدايته على ذلك المحور لتحديد مسقط البداية، وعمود آخر من نهايته لتحديد مسقط النهاية. وتكون مركبة المتجه المطلوبة على هذا المحور هي المتجه الواصل من مسقط البداية لمسقط النهاية. ونلاحظ من الشكل (11-1) أن طول هذه المركبة يساوي الضلع ab في المثلث القائم abc، أي أن:

$$V_x = ab = 7\cos 30° = 6.1$$

كما نلاحظ أن اتجاه هذه المركبة بعكس محور السينات أي أنها سالبة، ونكتب $V_x = -6.1$.

وبنفس الطريقة نجد المركبة الصادية لـ **V** بإسقاط عمودين من بدايته ونهايته على oy فنلاحظ من الشكل (11-1) أن طول هذه المركبة يساوي طول الضلع bc في المثلث abc، أي أن:

$$V_y = bc = 7\sin 30° = 3.5$$

كما أن اتجاهه معاكس لمحور الصادات، ولذلك نكتب:

$$V_y = -3.5$$

وهي نفس النتائج التي حصلنا عليها سابقا.

لنفترض الآن أن المتجهين **A** و**B** معرفين بدلالة مركباتهما على النحو:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$$

و

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y$$

عندئذ تكون محصلتهما **C** معطاة بالعلاقة:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y) + (\mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y)$$

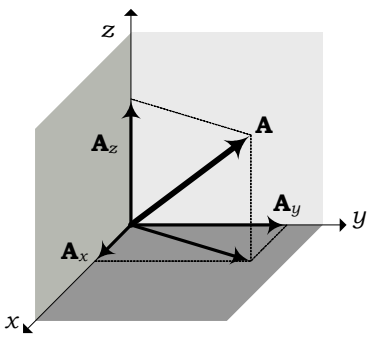
أو

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A}_x + \mathbf{B}_x) + (\mathbf{A}_y + \mathbf{B}_y) \qquad (10\text{-}1)$$

أي أن مركبتي **C** هما:

$$\boxed{\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \end{aligned}} \qquad (11\text{-}1)$$

وبالطبع فإن كل ماتقدم ينطبق على مجموع متجهين أو أكثر. كما اقتصر حديثنا على جمع وتحليل المتجهات الواقعة في نفس المستوي، إلا أنه يمكننا تعميم العمليات السابقة على المتجهات الواقعة في الفراغ (ثلاثة أبعاد). ولذلك نعرف **منظومة محاور إحداثية ثلاثية متعامدة** *oxyz* حيث يكون *oz* عموديا على المستوي الحاوي على المحورين *ox* و*oy* بحيث ننتقل من *ox* إلى *oy* بالدوران 90° بعكس عقارب الساعة، كما ننتقل من *oy* إلى *oz* بالدوران 90° بعكس عقارب الساعة، ومن *oz* إلى *ox* بزاوية 90° عكس عقارب الساعة أيضا. ويوضح الشكل (12-1) منظومة المحاور الثلاثية المذكورة ومركبات المتجه **A** عليها. ويمثل طول وعرض وارتفاع أي غرفة أفضل مثال على ذلك.



الشكل (12-1)

3- ضرب المتجهات:

تختلف عملية ضرب المتجهات كليا عن ضرب الكميات العددية، إذ أن ضرب عددين سيعطي عددا بالضرورة، فلو كان لدينا ثلاثة أشخاص (كمية عددية) مع كل واحد خمسة دنانير (كمية عددية) فإننا نجد مامعهم من نقود بضرب عددهم بما مع كل واحد والنتيجة 15 دينار هي كمية عددية بالطبع. إلا أن ضرب متجهين ببعضهما قد يكون عددا أو متجها بحسب طبيعة الضرب المستعمل. ولهذا نعرف ثلاث طرق لضرب المتجهات: الأولى ضرب متجه بعدد، والثانية الضرب العددي (أو النقطي) لمتجهين، والثالثة الضرب المتجه (أو التقاطعي) لمتجهين.

أ- **ضرب متجه بعدد:**

إذا ضربنا متجها **A** بعدد n فإننا نحصل على متجه جديد **B** له نفس منحى المتجه الأصلي **A** ويتناسب طوله معه بحيث أن:

$$\boxed{\mathbf{B} = n\mathbf{A}} \qquad (12\text{-}1)$$

ونلاحظ من هذه العلاقة أنه إذا كان n موجبا فإن للمتجهين **A** و**B** نفس الاتجاه، أما إذا كان n سالبا فإن لهما اتجاهين متعاكسين.

ومن أهم تطبيقات ضرب متجه بعدد التعبير عن مركبات متجه على المحاور ox وoy وoz. فإذا فرضنا أن **i** هو متجه طوله واحدة الأطوال وباتجاه محور السينات الموجب، عندئذ يمكن كتابة كل متجه محمول على محور السينات، مثل $\mathbf{C}_x$ في العلاقة (1-6)، كما يلي:

$$\mathbf{C}_x = C_x\mathbf{i} \tag{13-1}$$

حيث يدل C_x على قيمة $\mathbf{C}_x$ وتدل إشارته فيما إذا كان $\mathbf{C}_x$ بالاتجاه الموجب أو السالب لمحور السينات. فإذا كان $\mathbf{C}_x = -4.5\mathbf{i}$ مثلا فإن ذلك يعني أن طوله 4.5 وحدة وباتجاه محور السينات السالب. ويطلق على **i** اسم **متجه وحدة** *(unit vector)* على امتداد ox.

وبنفس الطريقة نعرف متجه وحدة **j** على امتداد محور الصادات الموجب oy، وآخر **k** على امتداد oz، وعندئذ نكتب أي متجه في الفضاء **D** بوساطة مركباته على المحاور ox وoy وoz بالشكل:

$$\boxed{\mathbf{D} = D_x\mathbf{i} + D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k}} \tag{14-1}$$

ونعيد التذكير أن المركبات الثلاث هي أعداد موجبة أو سالبة يعطي كل منها قيمة المركبة وتدل إشارته على اتجاهها بالنسبة للمحور المحمولة عليه.

ب- **الضرب العددي** (أو النقطي) *(scalar or dot product)*:

نعرف الضرب العددي لمتجهين **A** و **B** بالعلاقة:

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = c} \tag{15-1}$$

حيث c عدد موجب أو سالب قيمته:

$$c = AB\cos\theta_{AB} \tag{16-1}$$

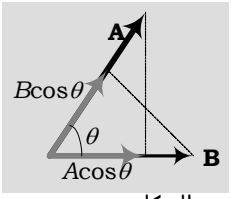
حيث θ_{AB} الزاوية المحصورة بين **A** و**B** بينما A وB طول كل منهما، على الترتيب.

ونستنتج من (1-15) و(1-16) أن:

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta_{AB}} \tag{17-1}$$

ونلاحظ من العلاقة السابقة أنه يمكن كتابتها بالشكل:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A(B\cos\theta_{AB}) = B(A\cos\theta_{AB})$$



الشكل (1-13)

ولكن $B\cos\theta_{AB}$ تمثل مركبة **B** على **A**، بينما $A\cos\theta_{AB}$ مركبة **A** على **B**، فعملية الضرب العددي تكافئ ضرب أحد المتجهين بمركبة الآخر عليه، كما في الشكل (1-13).

كما تجدر الإشارة هنا إلى أن:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \qquad (18\text{-}1)$$

أي أن الضرب العددي تبديلي وليس هناك أهمية لترتيب المتجهين المضروبين ببعضهما، وهذا منطقي لأن نتيجة الضرب هي عدد موجب أو سالب فقط.

مثل 1-6

مانتيجة الضرب العددي لمتجهات الوحدة التالية:

(أ) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}$ (ب) $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}$ (ج) $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$ (د) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$ (هـ) $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}$ (و) $\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}$

الحل: نستعمل (1-17) فنجد:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = ii\cos\theta_{ii}$$

ولكن ii=1 وθ_{ii}=0 لأن الزاوية بين أي متجه ونفسه تساوي الصفر طبعا، لذلك يكون:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1 \qquad (19\text{-}1)$$

وكذلك نستعمل (1-17) لنكتب:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = ij\cos\theta ij = (1)(1)\cos 90^\circ = 0$$

وبالتالي:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0 \qquad (20\text{-}1)$$

مثل 1-7

إذا كان $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}$ فجد حاصل الضرب العددي $\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}$ واستفد من النتيجة لمعرفة طول واتجاه **R** بالنسبة للمحاور الإحداثية.

الحل: نكتب:

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = (R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}).(R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k})$$

أي أن:

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = R_x^2(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + R_y^2(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + R_z^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) + 2R_xR_y(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + 2R_yR_z(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) + 2R_zR_x(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i})$$

وبالاستفادة من العلاقات (1-19) و(1-20) نستنتج أن:

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = RR\cos 0° = R^2 \tag{21-1}$$

أي أن:

$$\boxed{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \tag{22-1}$$

ولإيجاد الزاوية بين **R** والمحور ox مثلا، نضرب **R** عدديا بمتجه الوحدة **i** فنجد:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{R} = R_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + R_y(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + R_z(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) = iR\cos\theta_{Rx}$$

حيث θ_{Rx} الزاوية بين **R** ومحور السينات، كما أن i=1 لذلك نجد من (1-19) و(1-20) أن:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\theta_{Rx} &= \frac{R_x}{R}\\ \cos\theta_{Ry} &= \frac{R_y}{R}\\ \cos\theta_{Rz} &= \frac{R_z}{R}\end{aligned}} \tag{23-1}$$

حيث نحصل على العلاقتين الأخيرتين بطريقة مماثلة.

ويرمز للزوايا θ_{Rx} و θ_{Ry} و θ_{Rz} عادة بـ α وβ وγ، على الترتيب، ونلاحظ أن:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{24-1}$$

وتسمى هذه الزوايا **جيوب تمام التوجيه** *(direction cosines)* للمتجه المحدد بها.
ويمكن تعميم العلاقة (1-21) إلى أي متجهين **A** و**B** فنكتب:

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta_{AB} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z} \tag{25-1}$$

ويستفاد من هذه النتيجة لمعرفة الزاوية بين متجهين، كما هو موضح بالمثل التالي.

مثل 1-8

إذا كان $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ فما الزاوية بينهما؟

الحل: نستخدم (1-25) ونكتب

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = (2)(1) + (6)(-1) + (-3)(1) = -7 = AB\cos\theta_{AB}$$

حيث

$$A = \sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (-3)^2} = 7$$

و

$$B = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = 1.7$$

ولذلك يكون:

$$\cos\theta_{AB} = \frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{AB} = -0.58 \quad \Rightarrow \quad \theta_{AB} = 125°$$

ج- **الضرب المتجه** (أو التقاطعي) *(vector or cross product)*:

نعرف الضرب المتجه لمتجيهن **A** و**B** بالعلاقة:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} \qquad (26\text{-}1)$$

حيث **C** متجه جديد تعطى قيمته بالعلاقة

$$\boxed{C = AB\sin\theta_{AB}} \qquad (27\text{-}1)$$

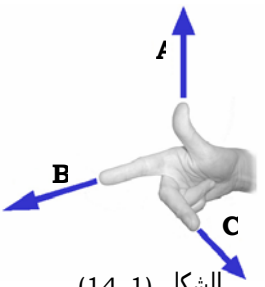
ويتحدد اتجاهه بقاعدة اليد اليمنى حيث يتجه الإبهام باتجاه **A** (المتجه الأول) وتتجه السبابة باتجاه **B** (المتجه الثاني) وعندها تشير بقية الأصابع (العمودية على المستوي الحاوي على الإبهام والسبابة) باتجاه **C** (المتجه الثالث)، كما في الشكل (1-14). وتكون الثلاثية **A** و**B** و**C** منظومة مشابهة للمحاور ox وoy وoz، وبنفس الترتيب.

ونستنتج من (1-26) و(1-27) أن:

$$\boxed{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB\sin\theta_{AB}} \qquad (28\text{-}1)$$

كما يتضح من تعريف الضرب التقاطعي لمتجهين أن:

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}} \qquad (29\text{-}1)$$



الشكل (1-14)

ولذلك فالضرب التقاطعي ليس تبديليا لكن قيمة النتيجة واحدة في كلا الحالتين مع تعاكس الاتجاهين، فطول $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ يساوي طول $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ ولكن باتجاه معاكس له.

ويمكن إيجاد نتيجة الضرب التقاطعي باستخدام المعينات، فإذا كان:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

و

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

فيكون:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (30\text{-}1)$$

أي أن:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k} \qquad (31\text{-}1)$$

مثل 1-9

مانتيجة الضرب التقاطعي لمتجهات الوحدة التالية:

(أ) $\mathbf{i}\times\mathbf{i}$ (ب) $\mathbf{j}\times\mathbf{j}$ (ج) $\mathbf{k}\times\mathbf{k}$ (د) $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ (هـ) $\mathbf{j}\times\mathbf{k}$ (و) $\mathbf{k}\times\mathbf{i}$

الحل: نستخدم العلاقة (1-26) ونكتب:

$$|\mathbf{i}\times\mathbf{i}| = ii\sin 0° = 0$$

إذا

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$$

وبشكل عام نكتب:

$$\mathbf{R}\times\mathbf{R} = 0 \qquad (32\text{-}1)$$

ولحساب $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ مثلا نكتب:

$$|\mathbf{i}\times\mathbf{j}| = ij\sin 90° = 1$$

فطول المتجه الناتج عن $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ يساوي الواحد واتجاهه عمودي على المستوي الحاوي على كل من **i** و**j** بحيث أن المتجهات **i** و**j** والمتجه الجديد مشابهة للثلاثية ox وoy وoz. فهذا المتجه هو متجه الوحدة **k**، أي أن:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i} \quad \text{و} \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j} \tag{33-1}$$

ونستنتج من (33-1) أن:

$$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i} \quad \text{و} \quad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j} \tag{34-1}$$

الشكل (1-15)

ويمكن تحديد قيمة واتجاه الضرب المتجه لأي متجهين من متجهات الوحدة بسهولة من الشكل(1-15) حيث نلاحظ أن ضرب متجه بآخر يليه **مباشرة** يعطي المتجه الثالث الذي يأتي بعدهما بإشارة موجبة إذا سرنا مع السهم، وبإشارة سالبة إذا سرنا بعكسه. ويمكن للقارئ أن يتأكد من نتيجة الضرب المذكورة في المثل السابق مستخدما الشكل (1-15).

مثل 1-10

إذا كان $\mathbf{R}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{F}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ فاحسب (أ) $\tau=\mathbf{R}\times\mathbf{F}$ و(ب) θ_{RF} و(ج) الزاوية بين **R** ومحور الصادات.

الحل: نستخدم (1-31) ونكتب

$$\tau=\mathbf{R}\times\mathbf{F}=(20-1)\mathbf{i}+(3-(-10))\mathbf{j}+(2-(-12))\mathbf{k}=19\mathbf{i}+13\mathbf{j}+14\mathbf{k}$$

(ب) لإيجاد الزاوية بين **R** و**F** نكتب

$$|\boldsymbol{\tau}|=|\mathbf{R}\times\mathbf{F}|=RF\sin\theta_{RF}$$

حيث

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=4.6$$

و

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=5.9$$

و

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2} = 26.9$$

وبذلك يكون

$$\sin\theta_{RF} = \frac{\tau}{RF} \approx 0.99 \quad \Rightarrow \quad \theta_{RF} = 82°$$

(ج) لحساب الزاوية بين **R** ومحور الصادات نستخدم ثاني العلاقات (1-23) ونكتب:

$$\cos\theta_{Ry} = \frac{R_y}{R} = -0.87 \quad \Rightarrow \quad \theta_{Ry} = 150°$$

8-1 متجه الوحدة *(Unit Vector)*

نعرف متجه الوحدة لأي متجه $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ بأنه يوازيه وطوله واحدة الأطوال، ويعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \qquad (35\text{-}1)$$

ومن الواضح أن **a** و**A** متوازيان ولهما نفس الاتجاه، كما أن طول **a** يساوي الواحد ويمكن للقارئ أن يتأكد من ذلك بنفسه.

مثل 1-11

جد متجه الوحدة للمتجه $\mathbf{R} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

الحل: نستخدم (1-35) ونكتب:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{j}}{\sqrt{9+1+16}} = \frac{3}{\sqrt{26}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{26}}\mathbf{j} + \frac{4}{\sqrt{26}}\mathbf{k}$$

ويترك للقارئ أن يتأكد أن طول **r** يساوي الواحد وأنه يوازي **R**.

مثل 1-12

برهن علاقة **جيب التمام** *(cosine law)* التي تعطي طول محصلة متجهين **A** و**B** بالعلاقة:

$$c = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta_{AB}}$$

حيث θ_{AB} الزاوية بين **A** و**B**.

الحل: نكتب $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ونضربه بنفسه عدديا فنجد:

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$$

وبحسب (1-17) نجد:

$$c^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta_{AB}$$

أي أن

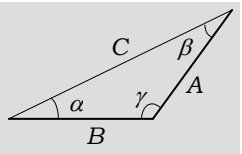
$$c = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta_{AB}}$$

وهو المطلوب.

مثل 1-13

برهن علاقة **الجيب** *(sine law)* التي يعطي اتجاه محصلة متجهين بالنسبة لأي منهما بالعلاقة:

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$$



الشكل (1-15)

حيث نعرف الزوايا α و β و γ كما في الشكل (1-15).

الحل: نكتب $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ونضرب الطرفين تقاطعيا بالمتجه $\mathbf{B}$ ونأخذ قيمة الضرب فقط، فنجد:

$$CB\sin\alpha = AB\sin\gamma$$

ومنه:

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{C}{\sin\gamma}$$

وبضرب طرفي العلاقة $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ تقاطعيا بالمتجه $\mathbf{A}$ نجد النسبة الثانية وهو المطلوب.

بأي اتجاه كان السائق يتحرك؟

الجدول 1-2 الكميات الأساس في الفيزياء

أ- الكمية الفيزيائية: الطول *(Length)*، الوحدة الأساسية المتر (m)

1 Fermi	1 F	10^{-15} m	فيرمي
1 Angstrom	1 A	10^{-10} m	أنغستروم
1 nanometer	1 nm	10^{-9} m	نانومتر
1 micrometer	1 μm	10^{-6} m	مايكرومتر
1 millimeter	1 mm	10^{-3} m	ميلمتر
1 centimeter	1 cm	10^{-2} m	سنتمتر
1 kilometer	1 km	10^{+3} m	كيلومتر

ب- الكمية الفيزيائية: الكتلة *(Mass)*، الوحدة الأساسية الكيلوجرام (kg)

1 microgram	1 μg	10^{-9} kg	مايكروغرام
1 milligram	1 mg	10^{-6} kg	ميليغرام
1 gram	1 g	10^{-3} kg	غرام
1 ton	1 t	10^{+3} kg	طن

ج- الكمية الفيزيائية: الزمن *(Time)*، الوحدة الأساسية الثانية (s)

1 picosecond	1 ps	10^{-12}	بيكوثانية
1 nanosecond	1 ns	10^{-9}	نانوثانية
1 microsecond	1 μs	10^{-6}	مايكروثانية
1 millisecond	1 ms	10^{-3}	ميلي ثانية
1 minute	1 min	60	دقيقة
1 hour	1 h	3600	ساعة

الجدول 1-3 مضاعفات العدد عشرة

العدد	10^{-15}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{3}	10^{-2}	10^{+3}	10^{+6}	10^{+9}	10^{+15}
التسمية	فيرمي	بيكو	نانو	مايكرو	ميلي	سنتي	ديسي	كيلو	ميجا	جيجا	تيرا
الاختصار	F	p	n	μ	m	c	d	k	M	G	T

ملخص الفصل

الكميات العددية	تتحدد بقيمتها فقط
الكميات المتجهة	تتحدد بقيمتها واتجاهها
جمع الكميات المتجهة تبديلي	$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$
طول محصلة متجهين	$c=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta_{AB}}$
اتجاه محصلة متجهين	$\frac{A}{\sin\alpha}=\frac{B}{\sin\beta}=\frac{C}{\sin\gamma}$
مركبات متجه A	$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$
طول متجه	$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$
الزاوية بين متجه ومحور n	$\cos\theta_n=A_n/A$
الضرب العددي لمتجهين هو عدد قيمته	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta_{AB}$
الضرب المتجه لمتجهين هو متجه طوله	$\lvert\mathbf{A}\times\mathbf{B}\rvert=AB\sin\theta_{AB}$
متجه الوحدة **a** لمتجه **A**	$\mathbf{a}=\mathbf{A}/A$

تمارين ومسائل

نظام الوحدات الدولي ومعادلة الأبعاد

1-1 تعطى كثافة الماء عادة بـ $1\ \mathrm{g/cm^3}$. ماكثافة الماء في نظام الوحدات الدولي؟

2-1 يتحرك جسم بسرعة $70\ \mathrm{km/h}$. ماسرعة هذا الجسم في نظام الوحدات الدولي؟

3-1 يعطى موضع جسم يتحرك على محور السينات بالعلاقة $x=at^2-bt^3$، حيث a وb ثابتان موجبان. استخدم معادلة الأبعاد لإيجاد أبعاد a و b.

جمع وتحليل المتجهات

4-1 ماقيمة واتجاه $\mathbf{A}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ و $\mathbf{B}=-5\mathbf{i}-12\mathbf{j}$ و $\mathbf{C}=-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$؟

5-1 ماطول المتجه المحدد بمركباته (2,–2,4) وما الزوايا التي يصنعها مع ox وoy وoz؟

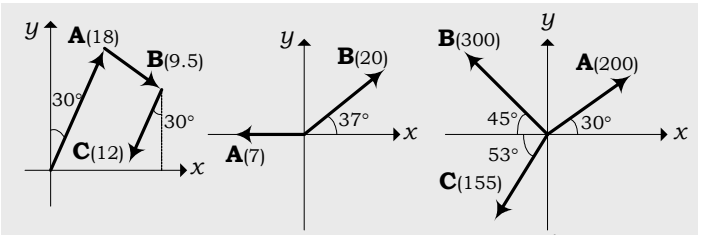
6-1 يسير شخص في نفق مسافة 50 m شرقا ثم 100 m باتجاه 30° غرب الشمال، وأخيرا 150 m غرب الجنوب. ما المسافة التي يجب أن يسيرها قيمة واتجاها ليعود لموضعه الابتدائي؟

7-1 جد بالرسم محصلة المتجهات الموضحة بالشكل (1-16 أ).

8-1 حلل كل متجه معطى بالمسألة السابقة إلى مركبتين وحلل محصلة المتجهات وتحقق من أن مجموع مركبات المتجهات على كل محور يساوي مركبة المحصلة على ذلك المحور.

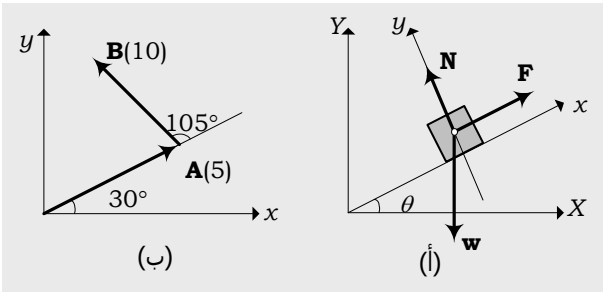
9-1 جد محصلة المتجهين **A** و**B** بالشكل (1-16 ب) مستعملا الرسم والطريقة التحليلية.

10-1 جد محصلة المتجهات **A** و**B** و**C** الموضحة بالشكل (1-16 ج) بالرسم والطريقة التحليلية.



الشكل (1-16)

11-1 يوضح الشكل (1-17أ) الجسم m الخاضع لعدة قوى (متجهات). حلل كل قوة إلى مركبتين على ox وoy ثم على OX وOY.



الشكل (1-17)

12-1 حلل المتجهين **A** و**B** الموضحين بالشكل (1-17ب).

13-1جد مركبات **C**=**A**+**B** و**D**=**A**–**B** وقيمة واتجاه**C** و**D** للمتجيهن $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

14-1 تطير طائرة 20 km باتجاه شمال الشرق ثم 30 km شرقا وبعد ذلك 10 km شمالا. مابعد الطائرة عن نقطة انطلاقها وبأي اتجاه؟

15-1 يجمع المتجه **M** (طوله 5 وحدات ويصنع زاوية °37 مع محور السينات الموجب) مع المتجه **N** فوجد أن طول محصلتهما 5 وحدات وتصنع زاوية °53 مع محور السينات الموجب. ماقيمة واتجاه **N**؟

16-1 لدينا متجه **A** طوله 2 وحدة ويصنع زاوية 60° فوق محور السينات الموجب والمتجه **B** طوله 4 وحدات ويصنع زاوية 60° تحت محور السينات الموجب. ماقيمة واتجاه **A+B** و **A–B** و **B–A**؟

17-1 ارسم المتجهين $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ على محورين *ox* و*oy* مدرجين بشكل مناسب وحدد من الرسم **A+B** و**A–B** وقارن نتائجك بالإجابات التي تحصل عليها بالحساب.

ضرب المتجهات

18-1 ماقيمة واتجاه الفرق بين متجهين طول الأول 10 وحدات والثاني 6 وحدات والزاوية بينهما 30°؟

19-1 يعطى المتجهان $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. مامركبة كل متجه على الآخر؟

20-1 ما الزاوية بين المتجهين $\mathbf{A} = 3.2\mathbf{i} + 1.6\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = 0.5\mathbf{i} + 4.5\mathbf{j}$؟ ومماقيمة واتجاه المتجه **C** العمودي على **A** ويقع في المستوي *xy*؟

21-1 ما $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ و $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ و $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ و $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ إذا كان $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = 4\mathbf{k}$ و $\mathbf{C} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ و $\mathbf{j}$؟

22-1 مامركبات $\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}$ والزاوية التي يصنعها مع المحور oz حيث $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{C} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$؟

23-1 ليكن لدينا المتجهان $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. (أ) احسب طول واتجاه كل منهما (ب) احسب $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ و $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ واكتب كل منهما بدلالة متجهات الوحدة وجد طول واتجاه كل واحد. (ج) احسب $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ وجد الزاوية بينهما. (د) احسب $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ واكتبه بدلالة متجهات الوحدة واحسب طوله واتجاهه.

24-1 ماسماحة متوازي الأضلاع المشكل من المتجهين المتجاورين **A** و**B** المعرفين في المسألة السابقة؟ قارن إجابتك بنتيجة الضرب $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.

25-1 يبلغ طول المتجه **A** ست وحدات ويقع على امتداد محور السينات الموجب، بينما يبلغ طول **B** أربع وحدات ويصنع زاوية 30° مع محور السينات الموجب. جد $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.

26-1 ما الزاوية بين المتجه $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ومحور العينات *oz*؟

27-1 ما الزاوية بين المتجهين $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ؟

28-1 ما الزاوية بين المتجهين $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ؟

29-1 ما $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ و $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ إذا كان طول **A** 10 وحدات وطول **B** 6 وحدات والزاوية بينهما 60°؟

30-1 أثبت أن $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k})$ لايساوي $(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{k}$.

1-31 برهن أن $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=0$ من أجل أي متجهين **A** و**B**.

1-32 ما الشروط التي يجب أن تتحقق لتكون قيمة محصلة متجهين متساويين مساوية لقيمة كل واحد منهما؟

1-33 برهن أن $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ من أجل أي ثلاثة متجهات **A** و**B** و**C** (مساعدة: اكتب المتجهات بدلالة مركباتها على المحاور الإحداثية).

1-34 ارسم المتجهين $\mathbf{A}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ و $\mathbf{B}=6\mathbf{i}$ وحدد من الرسم الزاوية بينهما ثم احسب **A**·**B** وجد الزاوية بين المتجهين بالحساب وقارن النتيجتين.

1-35 يقع المتجه **A** في المستوي *yz* صانعا زاوية 63° مع المحور *oy* بعكس عقارب الساعة، بينما يقع المتجه **B** في المستوي *xz* صانعا زاوية 48° مع المحور *ox* بعكس عقارب الساعة أيضا. جد كل من **A**·**B** و $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ والزاوية بينهما إذا علمت أن طول الأول 3.2 والثاني 1.4.

1-36 جد متجهات الوحدة لكل من **A** و**B** و $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ في المسألة السابقة.

1-37 هل يمكن الاستفادة من أن $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ أو $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ لبرهان أن **B=C**؟ هل تتغير الإجابة لو كان $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ و $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ ؟

من علماء الإسلام

الخوارزمي

أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي (توفي 236هـ، 850 م).
من أكبر علماء الإسلام العالميين الذين كان لهم تأثير كبير على العلوم الرياضية والفلكية. عاش في زمن الخليفة العباسي المأمون. وهو مؤسس علم الجبر كعلم مستقل عن الحساب، وقد أخذه الأوربيون عنه. وأول من استعمل كلمة "جبر" للعلم المعروف الآن بهذا الاسم. وترجع كل الكلمات التي تنتهي في اللغات الأوربية بـ "algorism" (الذي يبنى عليه برمجة الحاسوب) إلى اسم الخوارزمي. كما يرجع إليه الفضل في تعريف الناس بالأرقام الهندية (وهي التي تعرف حاليا بالأرقام العربية). من أسهاماته الهامة في الرياضيات اكتشافه بعض القواعد وتطويرها، كقاعدة الخطأين، والطريقة الهندسية لحل المربعات المجهولة التي تسمي اليوم باسم المعادلة من الدرجة الثانية، كما نشر الخوارزمي أول الجداول العربية عن المثلثات للجيوب والظلال. وأبدع الخوارزمي في علم الفلك، ووضع جداول فلكية (زيجا) مما كان له الأثر الكبير على الجداول الأخرى التي وضعها المسلمون وغيرهم فيما بعد. من أشهر كتبه **الجبر والمقابلة** و**صورة الأرض** و **عمل الاسطرلاب**.